

ИССЛЕДОВАНИЕ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ ОКОЛО ОТВЕРСТИЙ ПЕРФОРАЦИИ ЭЛЕМЕНТОВ ПАРОГЕНЕРАТОРА В ТРЕХМЕРНОЙ ПОСТАНОВКЕ

А. А. Бессарабов
ФГУП ОКБ «ГИДРОПРЕСС»

ВВЕДЕНИЕ

Проблема концентрации напряжений около отверстий является одной из самых важных в технике. Исследованию концентрации напряжений около отверстий посвящено много работ, существуют специальные справочники. Но большинство справочных данных основано или на решениях для плоских задач или на решениях в рамках теории тонких оболочек. Когда же диаметр отверстия соизмерим с толщиной стенки, напряженное состояние около отверстия становится существенно трехмерным и справочные коэффициенты здесь уже не применимы. Классическим примером такой ситуации является обобщенная задача Кирша – о напряженном состоянии около единичного отверстия в неограниченной пластине конечной толщины. Например, если диаметр отверстия равен толщине пластины, напряжения σ_z , действующие перпендикулярно плоскости пластины, достигают 1/3 от приложенной нагрузки (рисунок 1). В густоперфорированных пластинах и оболочках ситуация усложняется из-за взаимного влияния отверстий и их влияния на общее напряженное состояние перфорированного элемента. Особенно это касается энергетического оборудования, где перфорация зачастую определяет температурное поле в элементе и, соответственно, концентрацию термических напряжений.

Расчеты же концентрации в трехмерной постановке из-за их сложности проводились в основном численными методами, поэтому у разных авторов наблюдается значительный разброс результатов.

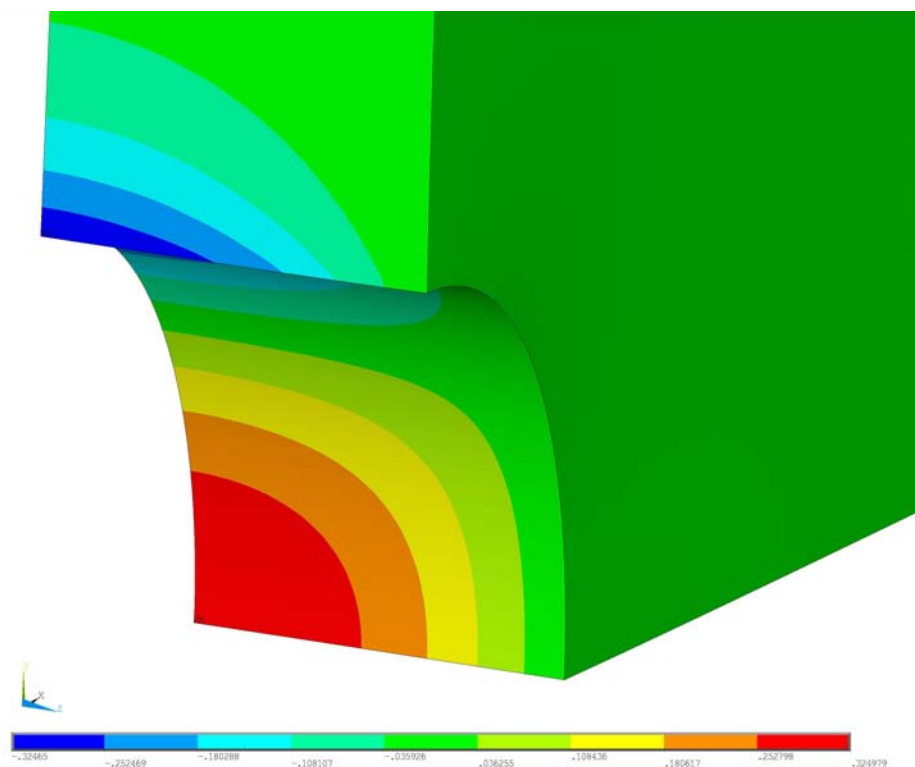


Рис. 1. Распределение напряжений σ_z около одиночного отверстия в пластине при одноосном растяжении при диаметре равном толщине

1. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

В настоящее время существует несколько подходов к решению таких задач:

– прямой подход, когда строится подробная трехмерная расчетная модель, включающая в себя все отверстия перфорации, и для каждого отверстия задаются граничные условия;

– полуаналитический метод, когда зона перфорации заменяется гипотетическим сплошным материалом с приведенными упругими характеристиками; затем в этой зоне выделяется область с наибольшими напряжениями, и для нескольких отверстий из этой области проводится уточненный расчет;

– непрямой метод, когда геометрия расчетной модели описывается как единое целое при помощи обобщенных (импульсных) функций, позволяющих получить обобщенное решение, а затем произвести его детализацию для отдельных отверстий.

Прямой подход, несмотря на его кажущуюся простоту, приводит к весьма громоздкой расчетной модели, что помимо больших затрат машинных ресурсов чревато накоплением ошибок машинного округления и потерей устойчивости счета.

Второй подход, основанный на замене перфорированной зоны анизотропным материалом с эффективными (приведенными) упругими свойствами, естественно, требует меньших затрат, но существует проблема корректного определения эффективных упругих характеристик, которые в литературе в основном определялись для плоских или квазиплоских задач, таких, например, как чистый изгиб тонких пластинок [1]. Многочисленные исследования [2] свидетельствуют о том, что поведение перфорированных пластин в условиях растяжения-сжатия и изгиба существенно отличается одно от другого, причем, если в случае растяжения-сжатия приведенные упругие характеристики практически не зависят от толщины пластины, то в случае изгиба зависят существенно. Поэтому каждый расчет с применением приведенных упругих характеристик требует уточнения в зависимости от типа напряженного состояния, в котором находится перфорированный элемент.

Третий подход состоит в следующем. Ю. М. Коляно предложил метод расчета кусочно-однородных тел [3], основанный на применении обобщенных функций [4, 5]. Метод позволяет физико-механические характеристики и их комбинации кусочно-однородных тел, геометрию оболочек, пластин, стержней, коэффициент теплоотдачи с поверхности тела описать как единое целое с помощью единичных характеристических функций и получать единые решения для всей области в целом. В результате подстановки представленных таким образом характеристик в уравнения термоупругости получаются дифференциальные уравнения и граничные условия, содержащие коэффициентами ступенчатые функции, дельта-функцию Дирака и ее производную, что требует разработки теории и методов решения таких задач. Этим вопросам посвящена монография Я. С. Подстригача, В. А. Ломакина и Ю. М. Коляно [6].

2. ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД

Если взять за основу идею Ю. М. Коляно, то перфорированный элемент можно так же представить как кусочно-однородную структуру, геометрию которой можно описать при помощи обобщенных (разрывных) функций. Поступим несколько иным путем. Заменяем расчетную перфорированную область V на более простую сплошную область V' -например, оболочку без отверстий. Введем функцию координат $\omega(x,y,z)$, равную нулю если точка с координатами (x,y,z) находит-

ся в отверстии перфорации (то есть, вне области V) и равная 1, если точка (x,y,z) находится в области V .

Как и всякая другая функция, $\omega(x,y,z)$ может быть представлена в виде

$$\omega(x, y, z) = \omega_0 + \eta \cdot \Delta\omega(x, y, z) \quad (1)$$

где ω_0 - постоянная (некоторое среднее значение);

$\Delta\omega(x,y,z)$ - функция координат, характеризующая отклонение от среднего значения, эта функция сохраняет свойства $\omega(x,y,z)$;

η - некоторая величина (параметр).

Далее воспользуемся вариационно-асимптотическим методом В. Л. Бердичевского [7]. Рассмотрим энергию упругой деформации [8]:

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + 2\sigma_{xy} \varepsilon_{xy} + 2\sigma_{xz} \varepsilon_{xz} + 2\sigma_{yz} \varepsilon_{yz}) dV \quad (2)$$

где V - объем расчетной области,

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$ - компоненты тензора напряжений;

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$ - компоненты тензора деформаций.

Энергия (2) рассматривается как функционал, стационарное значение которого дает искомое напряженно-деформированное состояние. Функционал (2) с учетом (1) можно записать как

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_V \sum \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_{V'} \sum \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \omega(x, y, z) dV' = \\ &= \frac{1}{2} \int_{V'} \sum \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \omega_0 dV' + \eta \frac{1}{2} \int_{V'} \sum \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \Delta\omega(x, y, z) dV' \end{aligned} \quad (3)$$

и рассматривать его как определенным на некотором множестве элементов u и зависящим от параметра η . Это множество элементов в случае (2,3) суть упругие перемещения, так как соотношения между перемещениями и деформациями в линейной теории упругости выглядят как [8]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (4)$$

где $u_i, i=1,2,3$ – компоненты вектора перемещений;

$x_i, i=1,2,3$ – декартовы координаты ($x_1=x, x_2=y, x_3=z$);

$\varepsilon_{ij}, i=1,2,3; j=1,2,3$ – компоненты тензора деформаций.

Напряжения и деформации, как известно, связывает обобщенный закон Гука, который в общем случае анизотропии материала записывается через 4-мерный тензор упругих характеристик. В случае изотропного материала, имеющего две независимые упругие характеристики, напряжения через деформации выражаются как

$$\sigma_{ii} = 2\mu \varepsilon_{ii} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}), i=1,2,3; \sigma_{12} = 2\mu \varepsilon_{12}, \sigma_{13} = 2\mu \varepsilon_{13}, \sigma_{23} = 2\mu \varepsilon_{23}; \quad (5)$$

где λ, μ - упругие характеристики Ламе.

С учетом (4) и (5) функционал (3) можно выразить только через перемещения (и их производные) и рассматривать его зависящим только от перемещений и параметра $W(u, \eta)$.

Теперь устремим η к нулю. Очевидно, в (3) останется только одно слагаемое:

$$W_0(u_0, \eta) = \frac{1}{2} \int_{V'} \sum \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \omega_0 dV', \quad (6)$$

где через u_0 обозначены перемещения, соответствующие минимуму функционала.

Функционал (6) и его стационарная точка u_0 являются первым приближением для исходного функционала (3).

Второй член асимптотики будем искать следующим образом. Представим u в виде $u = u_0 + u_1$, где u_0 - стационарная точка функционала (6), получим функционал $W(u_0 + u_1, \eta)$. Сохраним в функционале $W(u_0 + u_1, \eta)$ главные члены, содержащие u_1 , используя то обстоятельство, что u_0 теперь фиксировано. Получим функционал $W_1(u_1, \eta)$. Его стационарная точка по u_1 представляет следующий член асимптотики.

Третий член асимптотики находим аналогично, представляя $u = u_0 + u_1 + u_2$, где u_0, u_1 зафиксированы (представляют собой решения предыдущих задач). Также выделяем в функционале $W(u_0 + u_1 + u_2, \eta)$ главные члены, содержащие u_2 , получаем следующий функционал $W_2(u_2, \eta)$. Поступая также с остальными членами асимптотического представления, строим последовательность функционалов, минимизация которых и дает искомое решение.

С точки зрения механики упругого тела векторная функция u_0 представляет собой ничто иное, как обычное решение задачи теории упругости, но для области с более простой конфигурацией (сплошное тело), нежели исходная (с перфорацией) и упругими характеристиками, измененными в ω_0 раз. Остальные функции u_1, u_2, u_3, \dots получаются из решения подобной задачи, но с начальными напряжениями, которые получаются перемножением полученного предыдущего решения (поля напряжений) на функцию $\Delta\omega(x, y, z)$.

Такой подход, позволяет, с одной стороны, получить хотя бы несколько первых приближений в аналитическом виде, с другой стороны, во многих практически важных случаях уменьшить размерность модели, например, свести 3-мерную задачу к последовательности 2-мерных.

Рассмотрим в качестве примера толстостенную оболочку с отверстием, под действием равномерной осевой нагрузки (рисунок 3). Оболочка без отверстия под такой нагрузкой – элементарная одномерная задача. Наличие же отверстия делает задачу существенно трехмерной (рисунки 4, 5). При этом конечно-элементная модель оболочки занимает около гигабайта машинной памяти.

Применим вышеописанный вариационный метод к толстостенной перфорированной оболочке. В этом случае средним значением функции $\omega(x, y, z)$ будет отношение объемов оболочки с отверстием и без него:

$$\omega_0 = V/V' = 1 - V_0/V' \quad , \quad (7)$$

где V_0 – объем, «вырезанный» из оболочки отверстием:

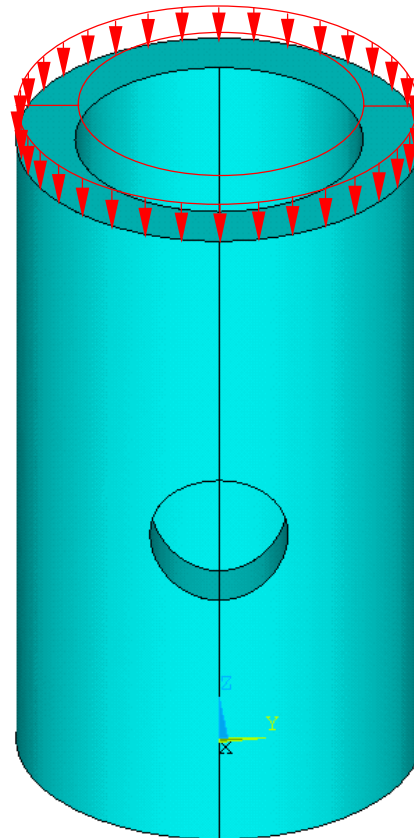


Рис. 3. Схема для расчета оболочки

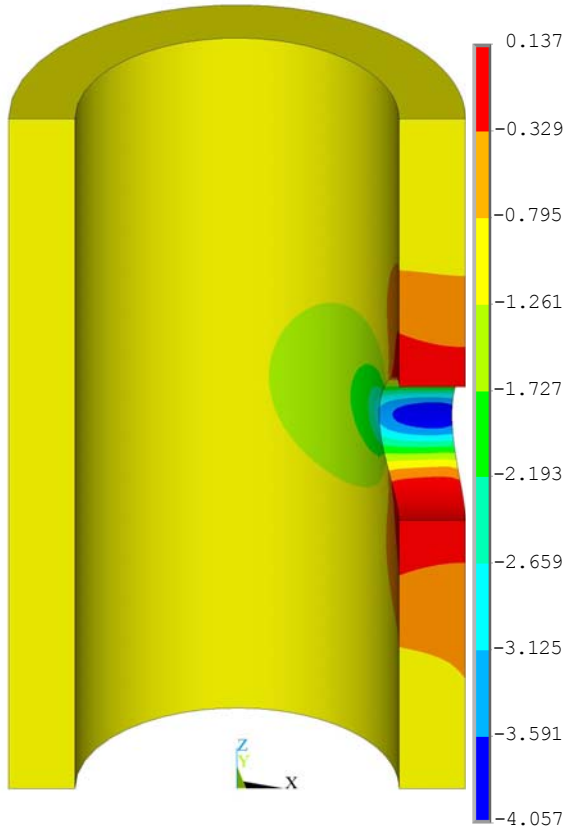


Рис. 4. Поле осевых напряжений в оболочке. Конечно-элементное решение.

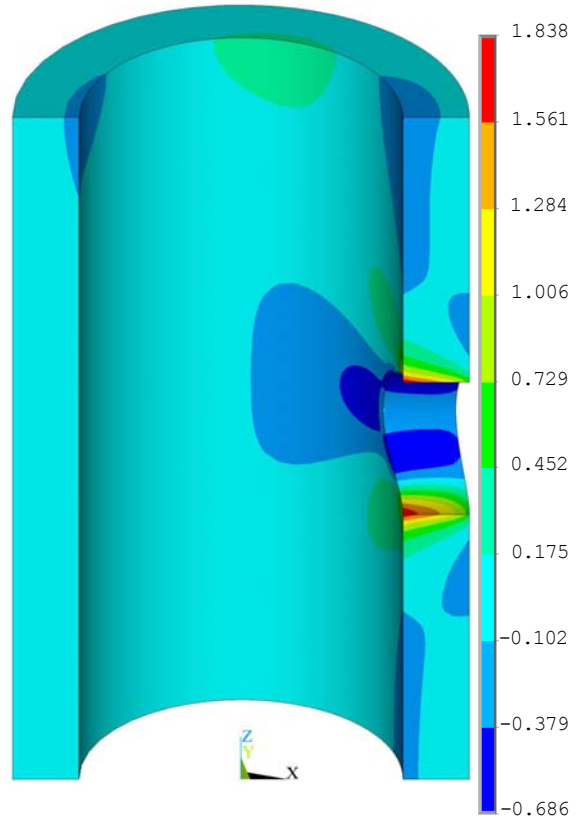


Рис. 5. Поле окружных напряжений в оболочке. Конечно-элементное решение.

$$V_o = 2 \int_0^{r_0} \int_{r_1}^{r_2} \int_{-a \sin\left(\frac{\sqrt{r_0^2 - (z-z_0)^2}}{r}\right)}^{a \sin\left(\frac{\sqrt{r_0^2 - (z-z_0)^2}}{r}\right)} d\theta r dr dz = \pi r_0^2 \left[r_2 F\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2, \left(\frac{r_0}{r_2}\right)^2\right) - r_1 F\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2, \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2\right) \right]; \quad (8)$$

здесь

r_2 – внешний радиус оболочки;

r_1 – внутренний радиус оболочки;

r_0 – радиус отверстия;

z_0 – координата оси отверстия;

F – гипергеометрическая функция Гаусса.

Функцию отклонения от среднего $\Delta\omega(r, \theta, z)$, запишем в полярных координатах и разложим в ряд Фурье по углу θ :

$$\Delta\omega(r, \theta, z) = \Omega_0(r, z) + \Omega_1(r, z) \cos \theta + \Omega_2(r, z) \cos 2\theta + \Omega_3(r, z) \cos 3\theta + \dots ; \quad (9)$$

где

$$\Omega_0(r, z) = \begin{cases} V_o/V' - \frac{1}{\pi} a \sin\left(\frac{\sqrt{r_0^2 - (z-z_0)^2}}{r}\right) & \text{если } r_0^2 - (z-z_0)^2 \geq 0 \\ V_o/V' & \text{если } r_0^2 - (z-z_0)^2 < 0 \end{cases} ; \quad (10)$$

$$\Omega_1(r, z) = \begin{cases} -\frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{r_0^2 - (z-z_0)^2}}{r} & \text{если } r_0^2 - (z-z_0)^2 \geq 0 \\ 0 & \text{если } r_0^2 - (z-z_0)^2 < 0 \end{cases} ; \quad (11)$$

$$\Omega_2(r, z) = \begin{cases} -\frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{r_0^2 - (z - z_0)^2}}{r} \sqrt{1 - \frac{r_0^2 - (z - z_0)^2}{r^2}} & \text{если } r_0^2 - (z - z_0)^2 \geq 0; \\ 0 & \text{если } r_0^2 - (z - z_0)^2 < 0 \end{cases} \quad (12)$$

и так далее.

Таким образом, получается, что расчет можно вести по 2-мерной схеме, где расчетная область – прямоугольная, ограниченная прямыми $r = r_1$, $r = r_2$, $z = 0$ и $z = H$ (H – высота оболочки). Область задания начальных напряжений, моделирующих отверстие, находится между горизонтальными прямыми $z = z_0 \pm r_0$, то есть, тоже регулярная (рисунок 6). Для такой (прямоугольной) расчетной области построение аналитического решения уже чисто техническая задача. Функции Ω_0 , Ω_1 , Ω_2 , ... можно, в свою очередь, разложить в еще один ряд Фурье по системе функций 1 , $\cos(\pi z/H)$, $\cos(2\pi z/H)$, $\cos(3\pi z/H)$, Тогда задача сведется к поиску решений по одной только радиальной координате.

Рассмотрим осесимметричную часть поля напряжений, для которой «начальные» напряжения описываются функцией Ω_0 (10). Эту функцию представим в виде

$$\Omega_0(r, z) = \Omega_{00}(r) + \Omega_{01}(r) \cos \frac{\pi z}{H} + \Omega_{02}(r) \cos \frac{2\pi z}{H} + \Omega_{03}(r) \cos \frac{3\pi z}{H} + \dots, \quad (13)$$

где

$$\Omega_{00}(r) = \frac{1}{H} \int_0^H \Omega_0(r, z) dz, \quad (14)$$

$$\Omega_{0n}(r) = \frac{2}{H} \int_0^H \Omega_0(r, z) \cos \frac{n\pi z}{H} dz, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (15)$$

Возьмем, к примеру, координату оси отверстия $z_0 = H/2$, тогда коэффициенты при нечетных косинусах будут равны нулю, остальные же вычисляются как

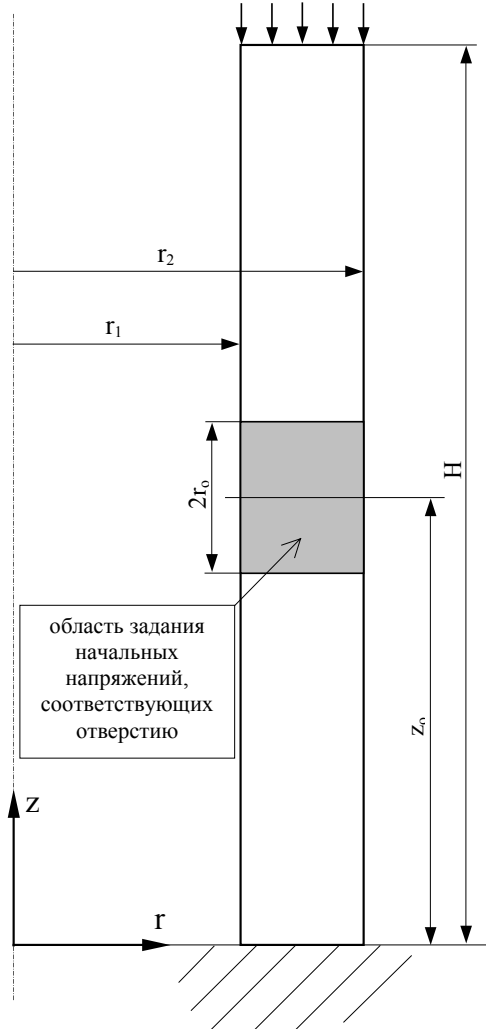


Рис. 6. Модификация расчетной схемы

$$\begin{aligned}
\Omega_{0n}(r) &= \frac{2}{H} \int_0^H \Omega_0(r, z) \cos \frac{n\pi z}{H} dz = -\frac{2}{H} \int_{-r_0}^{r_0} \frac{(-1)^{n/2}}{\pi} a \sin \left(\frac{\sqrt{r_0^2 - z^2}}{r} \right) \cos \frac{n\pi z}{H} dz = \\
&= \frac{1}{\pi H} \int_{-r_0}^{r_0} \left\{ \frac{\sqrt{r_0^2 - z^2}}{r} + \frac{1}{6} \left(\frac{\sqrt{r_0^2 - z^2}}{r} \right)^3 + \frac{3}{40} \left(\frac{\sqrt{r_0^2 - z^2}}{r} \right)^5 + \dots \right\} \cos \frac{n\pi z}{H} dz = \\
&= (-1)^{\frac{n}{2}+1} \frac{2r_0^2}{Hr} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((2k-1)!!)^2}{2^k k!} \frac{J_{k+1}(n\pi r_0/H)}{(n\pi r_0/H)^{k+1}} \left(\frac{r_0}{r} \right)^{2k}, \quad n = 2, 4, 6, \dots
\end{aligned} \tag{16}$$

J_k в (16) – функция Бесселя 1-го рода порядка k .

Для постоянной по координате z части Ω_{00} равнодействующая начальных напряжений равна нулю, следовательно, задача заключается только в том, чтобы устранить напряжения на верхней границе $z = H$. Это делается при помощи решений теории упругости типа $f(r)\exp(-\gamma z)$, которые можно получить, например, при помощи функции Лява [8]:

$$\Delta \Delta \phi = 0, \tag{17}$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \text{оператор Лапласа в полярных координатах.}$$

Далее полагая $\phi(r, z) = f(r)\exp(-\gamma z)$ и, подставляя в (17), получаем, что общее решение имеет вид

$$\phi(r, z) = [C_1 J_0(\gamma r) + C_2 Y_0(\gamma r) + C_3 r J_1(\gamma r) + C_4 r Y_1(\gamma r)] \exp(-\gamma z), \tag{18}$$

где Y_k – функция Бесселя 2-го рода порядка k .

Постоянные C_1 - C_4 и параметр γ в (48) находятся из условия равенства нулю касательных

$$\begin{aligned}
\sigma_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[(1-\nu) \Delta \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] = -\gamma^2 [-C_1 \gamma J_1(\gamma r) - C_2 \gamma Y_1(\gamma r) + \\
&+ C_3 (2(1-\nu) J_1(\gamma r) + \gamma r J_0(\gamma r)) + C_4 (2(1-\nu) Y_1(\gamma r) + \gamma r Y_0(\gamma r))] \exp(-\gamma z)
\end{aligned} \tag{19}$$

и радиальных напряжений

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\nu \Delta \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right] = -\gamma^2 \left[C_1 \left(\gamma J_0(\gamma r) - \frac{J_1(\gamma r)}{r} \right) + C_2 \left(\gamma Y_0(\gamma r) - \frac{Y_1(\gamma r)}{r} \right) + \right. \\
&+ C_3 (-(1-2\nu) J_0(\gamma r) + \gamma r J_1(\gamma r)) + C_4 (-(1-2\nu) Y_0(\gamma r) + \gamma r Y_1(\gamma r)) \left. \right] \exp(-\gamma z)
\end{aligned} \tag{20}$$

при $r = r_1, r_2$.

Компоненты поля напряжений, соответствующие функциям $\Omega_{0n}(r) \cos(n\pi z/H)$, можно найти опять-таки получить при помощи функции Лява, полагая $\phi(r, z) = f(r) \sin(n\pi z/H)$. В этом случае решение имеет вид

$$\phi(r, z) = \left[C_1 I_0 \left(\frac{n\pi}{H} r \right) + C_2 K_0 \left(\frac{n\pi}{H} r \right) + C_3 r I_1 \left(\frac{n\pi}{H} r \right) + C_4 r K_1 \left(\frac{n\pi}{H} r \right) + f_{\text{чн}}(r) \right] \sin \left(\frac{n\pi z}{H} \right), \tag{21}$$

где I_k, K_k – модифицированные функция Бесселя 1 и 2-го рода порядка k соответственно;

$f_{\text{чн}}(r)$ – частное решение, соответствующее фиктивным объемным нагрузкам, определяемым функцией $\Omega_{0n}(r)$.

Анализ формул (15), (16) показывает, что эти нагрузки представляют собой ряды по обратным степеням координаты r , следовательно, неоднородное решение $f_{\text{чн}}(r)$ можно выразить через модифицированные функции Струве [9].

Это делается в два этапа. Обозначим $\beta = n\pi/H$ и рассмотрим сначала неоднородное уравнение

$$\frac{d^2f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \beta^2 f = \frac{1}{r} \quad . \quad (22)$$

Решением этого уравнения является умноженная на постоянную функция Струве $\pi L_0(\beta r)/2\beta$, которую обозначим как $f_0(r)$. Затем берем уравнение

$$\frac{d^2f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \beta^2 f = \frac{1}{r^3} \quad , \quad (23)$$

решением которого является функция

$$f_1(r) = \frac{1}{r} + \frac{\pi\beta}{2} L_0(\beta r) \quad . \quad (24)$$

Далее все решения уравнений типа (22) с правыми частями $1/r^{2k+1}$, $k = 1, 2, 3, \dots$ получаются по рекуррентной формуле

$$f_k(r) = \frac{1}{(2k-1)^2} \left(\frac{1}{r^{2k-1}} + \beta^2 f_{k-1}(r) \right) \quad . \quad (25)$$

На втором этапе рассмотрим сначала уравнение

$$\frac{d^2g}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dg}{dr} - \beta^2 g = f_0(r) \quad , \quad (26)$$

решением которого является функция

$$g_0(r) = \frac{1}{2\beta^3} \left(\beta r \left(\frac{\pi}{2} L_1(\beta r) + 1 \right) - \frac{\pi}{2} L_0(\beta r) \right) \quad , \quad (27)$$

остальные решения таких уравнений с правыми частями f_k , $k = 1, 2, 3, \dots$ получаются по рекуррентной формуле

$$g_k(r) = \frac{1}{(2k-1)^2} (f_{k-1} + \beta^2 g_{k-1}(r)) \quad . \quad (28)$$

Следовательно, частное неоднородное решение находится как

$$f_{\text{чн}}(r) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{1-\nu} p \left(\frac{n\pi}{H} \right) \frac{2r_0^2}{H} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((2k-1)!!)^2}{2^k k!} \frac{J_{k+1}(n\pi r_0/H)}{(n\pi r_0/H)^{k+1}} r_0^{2k} g_k(r) \quad , \quad (29)$$

а постоянные C_1 - C_4 в (21) находятся из условия равенства нулю касательных и радиальных напряжений, определяемых этим решением, при $r = r_1, r_2$.

Далее при помощи соотношений

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\nu \Delta \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right], \quad \sigma_\theta = \frac{\partial}{\partial z} \left[\nu \Delta \phi - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right], \\ \sigma_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[(1-\nu) \Delta \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right], \quad \sigma_z = \frac{\partial}{\partial z} \left[(2-\nu) \Delta \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

из (21) остается получить выражения для напряжений, а также для перемещений при помощи формул

$$u_r = -\frac{1}{2G} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z}; \quad u_z = \frac{1}{2G} \left[2(1-\nu) \Delta \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right]. \quad (31)$$

Напряжения на верхней границе, определяемые тригонометрическим рядом из функций типа (21), в сумме с начальными дают результирующую, равную ну-

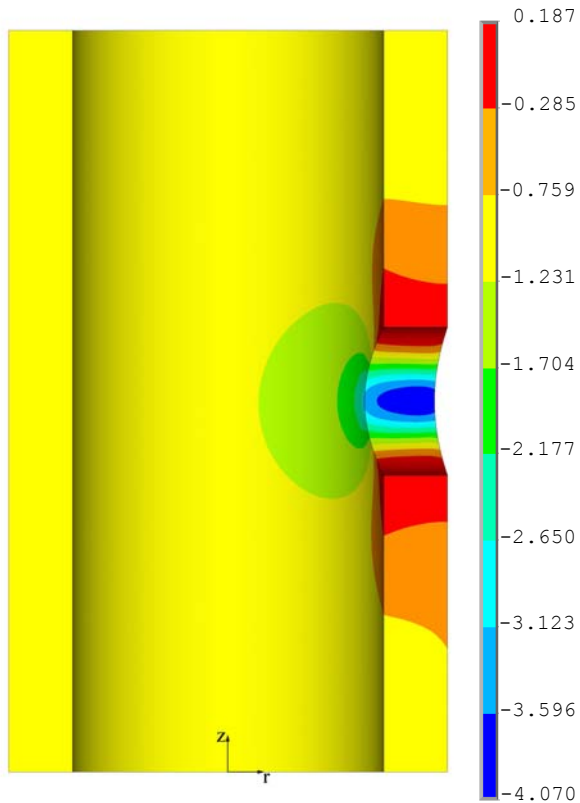


Рис. 7. Поле осевых напряжений в оболочке. Аналитическое решение.

лю. Оставшаяся на верхней границе самоуравновешенная система напряжений снимается решениями типа краевого эффекта (18).

Для неосесимметричных составляющих $\Omega_n(r, z)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ вид решения усложняется, так как оно должно удовлетворять не 4-м, как в осесимметричном случае, а 6-ти граничным условиям; тем не менее, оно строится по тем же принципам, что и осесимметричное. Вместе с осесимметричной составляющей эти решения дают первое приближение в виде ряда, этот ряд затем становится отправной точкой для построения второго приближения при помощи задания поля начальных напряжений, затем от второго осуществляется переход к третьему и так далее. Расчет при этом ведется по двумерной расчетной схеме.

На рисунке 7 показано распределение осевых напряжений в оболочке, полученное аналитическим путем. По сравнению с конечно-

элементным решением (рисунок 4) оно дает более точный результат.

3. РАСЧЕТ КОЛЛЕКТОРА ТЕПЛОНОСИТЕЛЯ ПЕРВОГО КОНТУРА

Изложенное выше решение для оболочки можно обобщить на случай реальной конструкции, такой как коллектор теплоносителя первого контура парогенератора типа ПГВ-1000 имеющий 11000 отверстий перфорации.

Традиционный подход, основанный на замене перфорированной зоны сплошным материалом с эквивалентной жесткостью [10] (рисунок 8), не дает детальной информации о напряженном состоянии перфорированной зоны, поэтому здесь требуются уточняющие расчеты. Полномасштабная модель (рисунок 9) показывает, что по сравнению с другими частями коллектора зона перфорации является первостепенным концентратором напряжений, причем разница в уровне напряжений между отдельными отверстиями невелика. Отметим, что полномасштабная модель весьма громоздка, и работать с ней даже в плане анализа полученного решения неудобно.

В этом смысле вариационный подход более гибок, так как решение можно проводить по 2-мерной (осесимметричной) схеме, моделируя перфорированную зону сплошным материалом с начальными напряжениями, определяемыми функциями типа (10)-(12). При этом можно использовать как численные, так и аналитические методы, но в данном случае целесообразно остановиться на «золотой середине» - полуаналитическом подходе. В любом случае расчет по 2-мерной схеме (рисунок 10) предпочтительнее в смысле реализации, так как сокращается количество узлов расчетной схемы и уменьшается размерность матрицы жесткости, следовательно, требуется гораздо меньше машинных ресурсов и времени на счет, а это является главной проблемой при построении полномасштабных моделей.

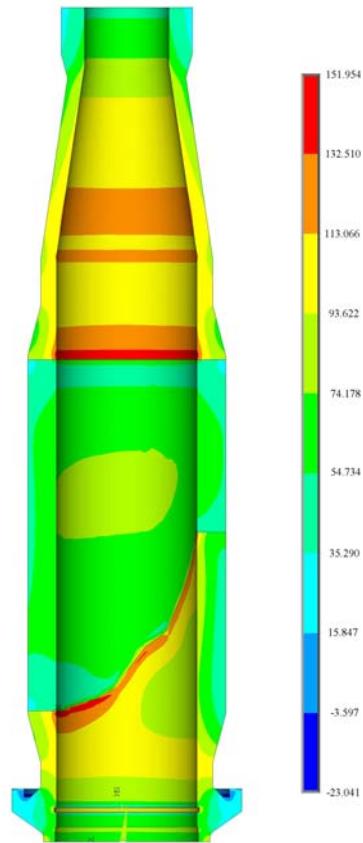


Рис. 8. Окружные напряжения в коллекторе Расчет при помощи замены перфорированной зоны сплошным материалом с эффективной жесткостью

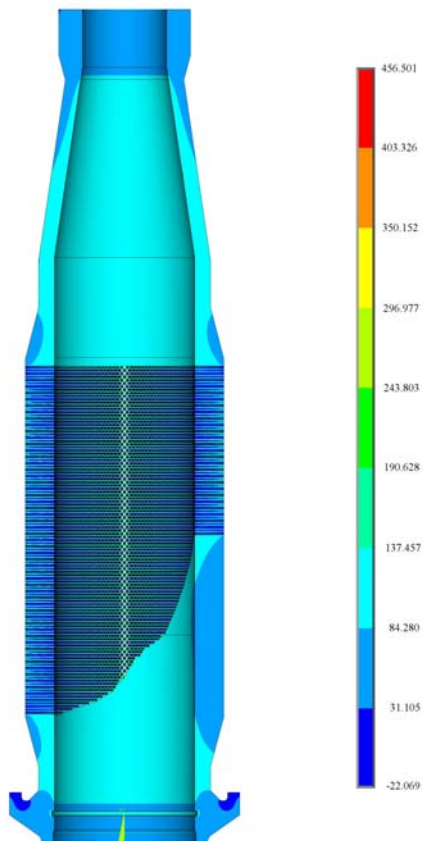


Рис. 9. Окружные напряжения в коллекторе. Полномасштабная модель

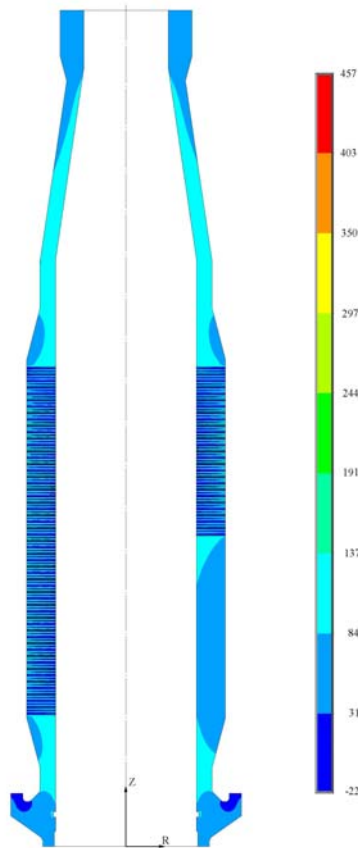


Рис. 10. Окружные напряжения в сечениях коллектора. Расчет по 2-мерной схеме вариационно-асимптотическим методом

ВЫВОДЫ

Вариационно-асимптотический метод в сочетании с использованием аппарата специальных импульсных функций представляется наиболее перспективным для расчета перфорированных конструкций, поскольку дает возможность во многих практически важных случаях уменьшить объем расчетной модели или получить аналитические решения для областей со сложной геометрией. В частности, такая сложная трехмерная задача как расчет напряженного состояния перфорированной зоны коллектора теплоносителя первого контура сводится к последовательности двумерных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григолюк Э.И., Фильштинский Л.А. Перфорированные пластины и оболочки. Москва, "Наука", 1970.
2. Освейллер Ф. Развитие концепции эффективных упругих постоянных для проектирования трубных досок теплообменников. Современное машиностроение, Сер. Б., № 3, 1990. с. 36–45.
3. Коляно Ю. М. Применение обобщенных функций в термомеханике кусочно-однородных тел. В кн.: Математические методы и физико-механические поля. Киев, Наукова думка, 1978, вып. 7, с. 7–11.

4. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. Москва, Наука, 1979. 320 с.
5. Гельфанд И. М., Шилев Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. Москва, Физматгиз, 1959. 470 с.
6. Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М. Термоупругость тел неоднородной структуры. Москва, Наука, 1984. 368 с.
7. Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. Москва, Наука, 1983. 448 с.
8. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. Москва, "Наука", 1979. 560 с.
9. Справочник по специальным функциям. Под ред. Абрамовица М. и Стиган И. Перевод с английского, Москва, "Наука", 1979. 832 с.
10. Бессарабов А.А., Григорьев В.А. Метод и алгоритм расчета эффективных упругих характеристик для перфорированных пластин и оболочек. Вторая конференция "Методы и программное обеспечение расчетов на прочность" (30 сент. - 5 окт. 2002, Геленджик, Краснодарский край). Сборник докладов. Изд. ИЦП МАЭ, Москва, 2003. с.43-55.