

ПРИМЕНЕНИЕ ПОДВИЖНЫХ СЕТОК ДЛЯ РЕШЕНИЯ МНОГОЖИДКОСТНЫХ ЗАДАЧ

В.Ю. Волков, А.Т. Нечаев, А.П. Скибин

АО ОКБ «ГИДРОПРЕСС», г. Подольск, Россия

Введение

Применение технологии пересекающихся сеток является эффективным средством для решения класса задач с подвижными твёрдыми границами. Данный подход применяется к задаче о движении цилиндрического стержня с закруглённым концом в узком цилиндрическом канале, который заполнен двумя средами с разными физическими свойствами. Эти среды разделены свободной поверхностью и в дальнейшем условно обозначаются “жидкость” и “газ”. Такого рода задачи встречаются во многих технических устройствах, например, в атомной отрасли подвижными элементами являются органы регулирования мощностью реактора и органы аварийной защиты. С помощью CFD моделирования можно проанализировать динамику стержня и гидродинамические процессы, в зависимости от начального состояния, свойств жидкости и газа и т.д. Как и любая CFD модель она требует её верификации, поэтому приводится ряд задач, на которых проверяется адекватность решения уравнений движения жидкости и твёрдого тела.

Математическая модель

Во всех задачах жидкость и газ является несжимаемой средой и ньютоновской жидкостью. Режим течения либо ламинарный, либо турбулентный, в зависимости от конкретного случая. Если течение турбулентное, то движение жидкости определяется на основании решения уравнений Рейнольдса. Движение твёрдого тела рассчитывается при помощи программного модуля DFBI (Dynamic Body Fluid Interaction), включающий в себя решатель уравнений движения твёрдого тела с шестью степенями свободы. STAR-CCM+ вычисляет суммарную силу и момент, действующий на твёрдое тело в результате влияния сил давления и вязкого трения со стороны жидкости. Исходя из условия одномерности движения твёрдого тела, то есть движения с одной степенью свободы, определяющие уравнения выглядят следующим образом:

$$m \frac{dv}{dt} = F$$

$$F = F_p + F_\tau + F_g + F_A + F_{ext}$$

$$F_p = \sum_f p_f a_f$$

$$F_\tau = - \sum_f \tau_f a_f$$

$$F_g = mg$$

Где m – масса тела, v – его скорость, F_p – гидродинамические силы, F_τ – силы вязкого трения, F_g – сила тяжести, F_A – сила Архимеда, F_{ext} – внешние силы, a_f – вектор площади.

Уравнения Рейнольдса:

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i v^k}{\partial x^k} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x^i} + \frac{\partial (\bar{\tau}_i^k - \overline{\rho v'_i v'^k})}{\partial x^k} + \rho \bar{F}_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\tau_{ik} = 2\mu e_{ik}$$

$$e_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^k} + \frac{\partial v_k}{\partial x^i} \right)$$

Для замыкания уравнений используется стандартная $k - \varepsilon$ модель турбулентности.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \rho \varepsilon + S_k$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \varepsilon u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} + S_\varepsilon$$

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

$$P_k = -\rho \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

$$C_{1\varepsilon} = 1.44, C_{2\varepsilon} = 1.92, C_\mu = 0.09, \sigma_k = 1.0, \sigma_\varepsilon = 1.3$$

Для отслеживания границы раздела двух жидкостей используется VOF (Volume of fluid) модель.

$$\frac{d}{dt} \int_V \alpha_i dV + \int_S \alpha_i \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \left(S_{\alpha_i} - \frac{\alpha_i}{\rho_i} \frac{d\rho_i}{dt} \right) dV$$

$\alpha_i = V_i/V$ – объёмная доля, ρ_i, μ_i – плотность и молекулярная вязкость i -й жидкости. При этом должны выполняться следующие равенства:

$$\rho = \sum_i \rho_i \alpha_i, \mu = \sum_i \mu_i \alpha_i$$

Задача о положении равновесия плавающего тела с приложенной внешней силой

Рассматривается стационарное положение тела, плавающего на поверхности жидкости с приложенной к нему внешней силой. В такой постановке баланс сил выглядит так:

$$0 = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_{ext},$$

и задача имеет простое аналитическое решение:

$$m = \rho V_0 + \frac{|\mathbf{F}_{ext}|}{|\mathbf{g}|},$$

где V_0 – объём части тела, погруженного в жидкость.

Задача решалась методом установления, то есть тело было выведено из положения равновесия и затем, совершая затухающие колебательные движения по оси y , приходило в положение равновесия. Решение данной задачи является проверкой выполнения второго закона Ньютона. На рисунке 1 показано начальное состояние тела (а), результат решения (б) и зависимость $y(t)$ (с). Параметры $m, \rho, \mathbf{F}_{ext}, \mathbf{g}$, а также длина тела L и остальные геометрические размеры были заданы так, чтобы $V_0 = 0,5V$, где V – объём тела. Положение тела y обезразмерено его длиной L , а время t – общим временем решения t_{max} . Расчёт даёт точное совпадение с аналитическим решением.

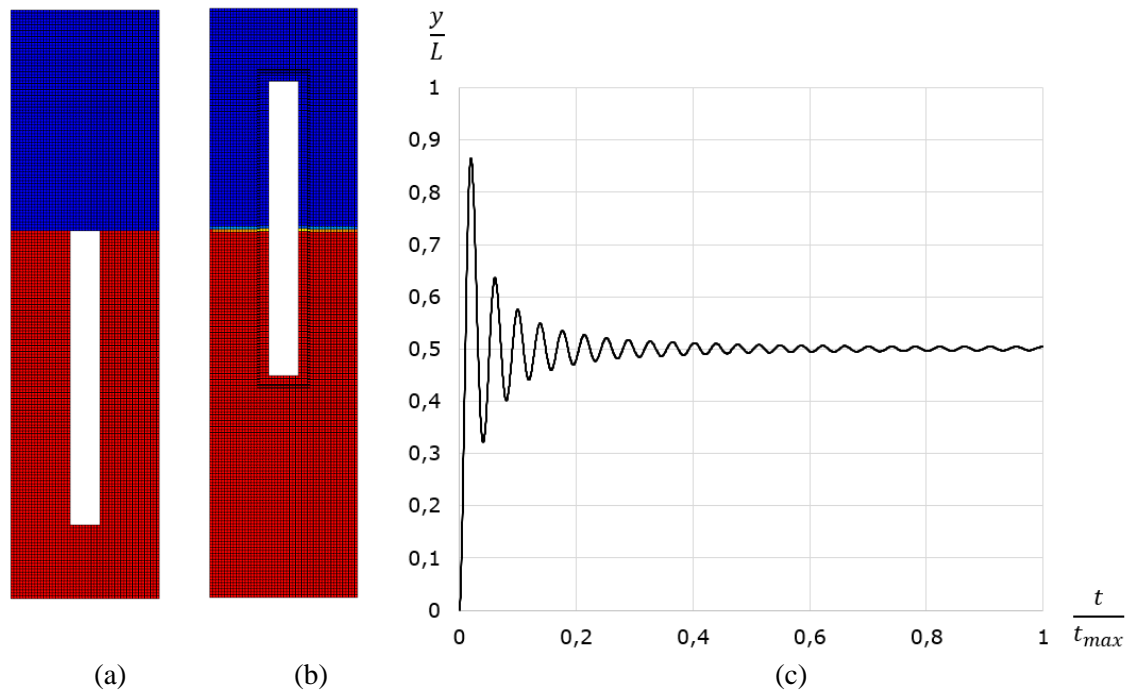


Рисунок 1: (a) – Начальное положение тела, (b) – конечное положение тела, (c) – закон движения стержня $y(t)$

Задача об обтекании сферы вязкой жидкостью

Расчёт обтекания проводился для трёх чисел Рейнольдса $Re = 100, 1000, 10000$. Радиус сферы равен радиусу закруглённого конца стержня основной модели. Сеточная структура вблизи сферы также идентична структуре вблизи обтекаемого конца стержня основной модели.

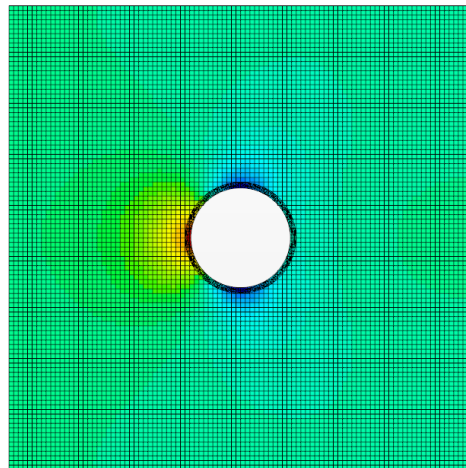


Рисунок 2 – Распределение давлений при $Re = 100$.

В таблице 1 приведены коэффициенты сопротивления для разных чисел Рейнольдса, полученные численно и взятые из экспериментальных данных

Таблица 1 – Зависимость $C_f(Re)$.

Re	C_f STAR-CCM+	C_f эксперимент	Погрешность
100	1,3	1,2	8 %
1000	0,48	0,43	11 %
10000	0,47	0,43	9 %

Задача о вертикальном погружении стержня в плоском канале

Рассматривается плоская задача о погружении вертикального стержня без воздействия внешних сил. Плоский аналог пространственной задачи удобен для проведения анализа влияния основных параметров численного метода: размерность сетки, величина шага по времени (числа Куранта), точность решения уравнений движения жидкости (количество итераций численного решения СЛАУ). На рисунке 3 показано начальное положение стержня, на рисунке 4 представлена базовая сеточная модель, в которой на зазор между стенкой канала и стержнем приходится 1 ячейка.



Рисунок 3 – Размещение стержня в плоском канале.

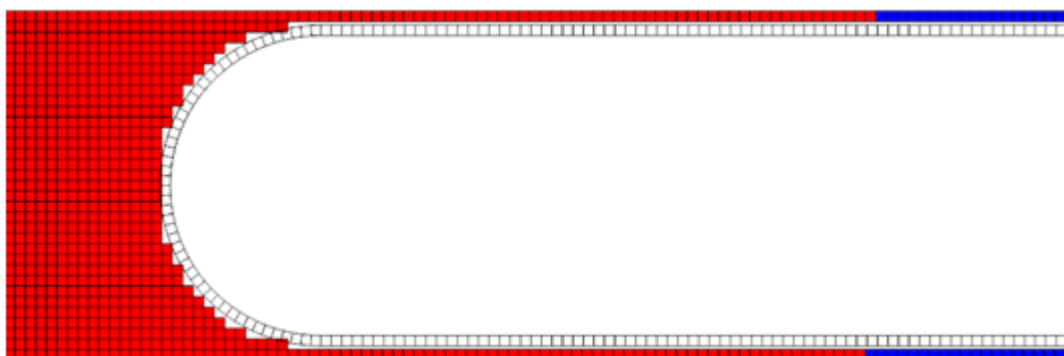


Рисунок 4 – Базовая сеточная модель.

Для анализа были выбраны следующие параметры:

- Количество ячеек в зазоре N : 1, 2, 3, 4, 8.
- Число Куранта Co : 1, 2, 4, 8, 16.
- Количество итераций для сходимости на каждом временном шаге: 2, 4, 8.

В начальный момент времени стержень выведен из положения равновесия, под действием силы тяжести погружается в жидкость и, затем, под действием силы Архимеда всплывает обратно. Расчёт проводился для некоторого фиксированного промежутка времени. В результате было выявлено, что при $N = 1, 2, 3$ не удаётся получить сходящееся решение и последующие исследования по влиянию числа Куранта и количества итераций проводились на сетке с $N = 4$.

Так как в основной задаче всплытия стержня не подразумевается, то в данном случае уделяется внимание участку, когда происходит погружение стержня. На рисунке 5 из графика видно, что на участке погружения размерность сетки никак не влияет на закон движения стержня, имеется незначительная разница для

глубины погружения порядка 3%. На рисунке 6 показано влияние количества итераций на закон движения. Максимальное отличие на участке погружения также находится в пределах 3% при достижении максимальной глубины. На рисунке 7 показано влияние числа Куранта. Для $Co = 1, 2, 4$ максимальная разница $y(t)$ составляет 3%, для $Co = 8$ отклонение кривой $y(t)$ от трёх предыдущих существенно увеличивается и составляет порядка 20% и для случая $Co = 16$ результаты расчёта получаются неадекватными. По результатам данного исследования можно сделать вывод, что при параметрах $N = 4; n = 2; 1 \leq Co \leq 4$ решение ведёт себя устойчиво на участке погружения. Данные параметры послужат базой для создания полномасштабной основной модели.

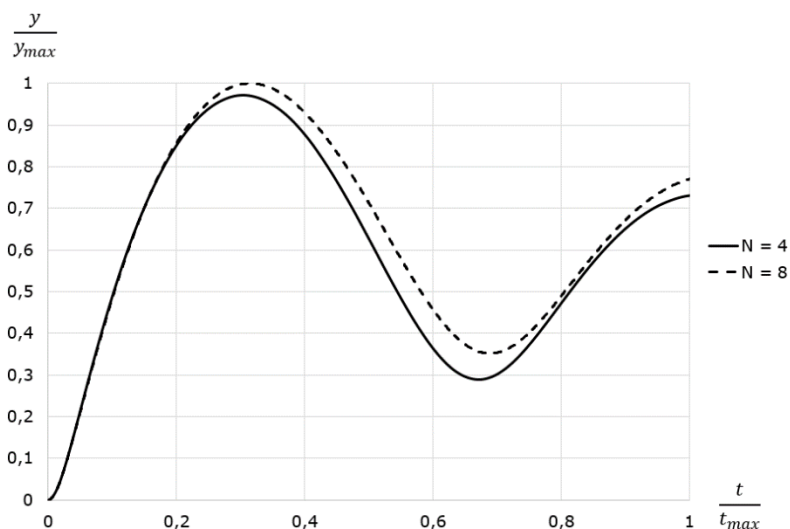


Рисунок 5 – Влияние размерности сетки на закон движения

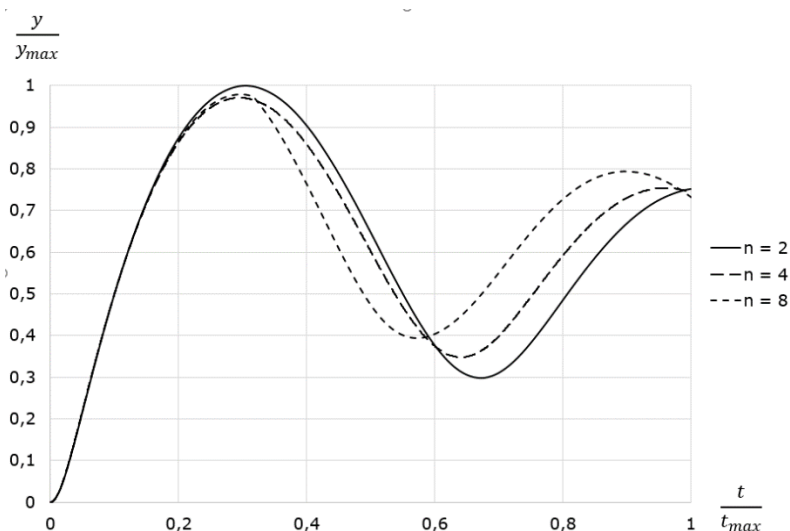


Рисунок 6 – Влияние количества итераций на закон движения

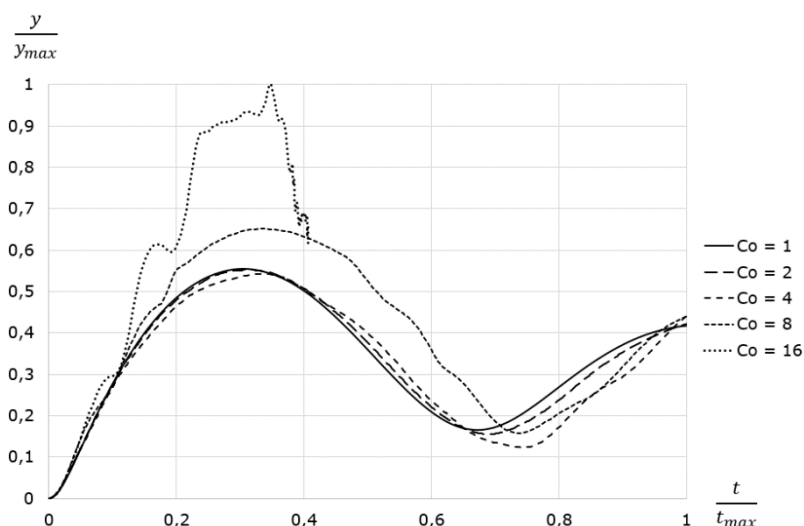


Рисунок 7 – Влияние числа Куранта на закон движения

Основная задача

Рассматривается трёхмерная задача о погружении цилиндрического стержня с закруглённым концом, который представляет собой полусферу. Размерность сеточной модели составляет порядка 4 млн. ячеек. В начальный момент времени часть канала заполнена жидкостью, остальная часть заполнена газом, граница раздела двух сред находится на некотором уровне $z = h$. Физические свойства жидкости и газа ρ, μ заданы и не меняются во времени. Процесс происходит при постоянной температуре, обмен теплом с внешней средой отсутствует. Часть стержня затоплена и его скорость равна нулю. Жидкость покоится, давление распределено по гидростатическому закону:

$$z < h: p = p_0 + \rho_1 g(h - z)$$

$$z > h: p = p_0 + \rho_2 g(h - z)$$

На верхнем торце канала задано граничное условие постоянства давления, т.к. при опускании стержня будет происходить вытеснение газа, то данное условие обеспечивает ему беспрепятственный выход. Поверхность стержня и канала являются гладкими непроницаемыми стенками, на которых выполнено условие прилипания жидкости. В момент времени $t = 0$ стержень приводится в движение за счёт силы тяжести и внешней упругой силы, величина которой убывает по закону Гука: $F_{ext} = k(\Delta l - z(t))$, где Δl – начальное сжатие пружины, k – коэффициент жёсткости пружины. Пусть при удлинении пружины на величину l упругая сила убывает с F_0 до F_1 . Тогда сила упругости меняется по следующему закону:

$$F = F_0 - \left(\frac{F_0 - F_1}{l} \right) z(t)$$



Рисунок 8 – Геометрическая модель стержня

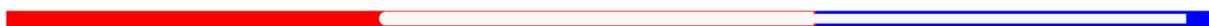


Рисунок 9 – Начальное положение стержня в канале

В результате решения задачи были найдены поля распределения давлений, скоростей, объёмной доли жидкости и газа, а также получен закон движения стержня $z(t)$ и зависимость $v(t)$. Таким образом, проведя серию расчётов с разной начальной силой F_0 , можно подобрать такое значение F_0 , чтобы стержень проходил необходимое расстояние за заданное время.

Заключение

На основании результатов расчётов тестовых задач можно сделать вывод о применимости вышеизложенной и реализованной в программном комплексе STAR-CCM+ математической модели к процессу погружения твёрдого тела в узком канале и анализу конструкций реальных технических систем, включающих такие процессы.

Литература

1. USER GUIDE STAR-CCM+, CD-adapco Inc., 10.02 ed. (2015).
2. J. H. FERZIGER and M. PERIC, Computational Methods for Fluid Dynamics, Springer, 3rd ed. (2002).
3. Сибеси Т., Брэдшоу П. Конвективный теплообмен. Физические основы и вычислительные методы. М.: Мир, 1987. 592 с.